Polynésie 7 juin 2013 — Correction

Exercice 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

1. $f(\ln 2) = \ln 2 \times e^{-\ln 2}$. Or, $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$ et $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, $f(\ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2$; RÉPONSE D.
2. On utilise la formule de dérivation d'un produit et : $f'(x) = e^{-x} + x(-e-x) = (1-x)e^{-x}$; RÉPONSE C.
3. On sait que l'équation de cette tangente est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. Donc $y = x$; RÉPONSE C.
4. $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ et $f''(x) < 0$ sur $]-\infty ; 2]$. Donc f est concave sur $]-\infty ; 2]$; RÉPONSE A.
5. À la calculatrice, on trouve, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{-2}{e} + 1$; RÉPONSE C.

Exercice 2 (5 points)
Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. (a) D'après l'énoncé, la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » est égale à 0,12.
   (b) $P_A(V) = \frac{P(A \cap V)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,4} = 0,3$.
   (c) Arbre pondéré représentant la situation :

2. (a) On utilise la formule des probabilités totales :
   $P(V) = P(A \cap V) + P(T \cap V = 0,12 + 0,6 \times 0,5 = 0,42$.
   (b) $P_{\overline{V}}(A) = \frac{P(\overline{V} \cap A}{\overline{V}} = \frac{0,4 \times 0,7}{1-0,42} = 0,483$.
3. Soit X la variable aléatoire donnant le coût d'un week-end à Londres. La loi de probabilité de X est alors :

x_i	390	490	510	610
$P(X = x_i)$	0,28	0,12	0,3	0,3

   L'espérance mathématique de X est égale à :
   $E(X) = 0,28 \times 390 + 0,12 \times 490 + 0,3 \times 510 + 0,3 \times 610 = 504$.
   Cela signifie que chaque personne dépense, *en moyenne*, 504 € par week-end à Londres. Le chiffre d'affaire espéré par l'agence pour 50 clients est donc égal à $50 \times 504 = 25\,200$ €.

Exercice 2 (5 points)
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Graphe probabiliste représentant la situation :

2. (a) Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

   (b) En 2013, $n = 3$ et $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \end{pmatrix}$.

   (c) On sait que $P = P \times M$ d'où $\begin{cases} a = 0{,}1b + 0{,}85a \\ b = 0{,}9b + 0{,}15a \end{cases}$. Ces deux égalités amènent à l'équation $0{,}15a - 0{,}1b = 0$. On sait de plus que $a + b = 1$ donc on a le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ 0{,}15a - 0{,}1b = 0 \end{cases}$ d'où :

   $$\begin{cases} a = 1 - b \\ 0{,}15 - 0{,}15b - 0{,}1b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - b \\ b = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0{,}4 \\ b = 0{,}6 \end{cases}$$

   Ainsi, le système se stabilise autour de l'état stable $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ ce qui signifie qu'à *long terme*, le fournisseur d'accès B possédera 60 % du marché.

Partie B

1. Cela revient à résoudre le système $\begin{cases} s + c = 550 & \text{(nombre total d'objets)} \\ 0{,}8s + 1{,}2c = 540 & \text{(coût total)} \end{cases}$.

2. S oit $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients, $X = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$ la matrice colonne repésentant les deux inconnues et $T = \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant le second membre.

   On a alors $R \times X = T \iff \begin{cases} s + c = 550 & \text{nombre total d'objets} \\ 0{,}8s + 1{,}2c = 540 & \text{coût total} \end{cases}$.

3. $X = R^{-1} \times T = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \end{pmatrix}$.

   L'entreprise B a distribuée 300 stylos et 250 porte-clés.

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

1. On note t le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011. On a alors :
$81\ 295 \times t^3 = 63\ 182$ soit $t^3 = \frac{63\ 182}{81\ 295}$
Ainsi, $t = \left(\frac{63\ 182}{81\ 295}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}9194$ ce qui correspond à une baisse de $(1-0{,}9194)*100 = 8{,}06$ par an.
2. Si on saisit $P = 50\ 000$ entrée, on obtient $3+2011 = 2014$ en sortie par cet algorithme. Cela signifie que les montants réalisés à l'exportation des produits perliers passera sous les 50 000 € en 2014 si la baisse de 8 % se poursuit.
3. (a) On passe d'un terme au suivant en multipliant par $1 - \frac{8}{100} = 0{,}92$. Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 63\ 182$ et de raison $q = 0{,}92$.
   (b) $u_n = u_0 \times 0{,}92^n$
   (c) En 2016, $n = 5$ et $u_5 = 63\ 182 \times 0{,}92^5 = 41\ 642$.
4. Cela revient à calculer la somme $S_9 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.
$$S_9 = u_0\frac{1-0{,}92^{10}}{1-0{,}92} = 446\ 706.$$

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

A. Étude de la zone 1

1. La courbe de densité de probabilité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. Par lecture graphique, $\mu = 150$.
2. À la calculatrice, on trouve $P(150 \leqslant X \leqslant 210) = 0{,}48$.
3. $P(X \geqslant 120) = 1 - P(X \leqslant 120) = 0{,}84$.
4. Non ; en effet, la courbe étant symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, $P(X \leqslant \mu) = 0{,}5$.
Ainsi, si $k > \mu$, $P(X < k) = P(X \leqslant \mu) + P(\mu < X < k)$ avec $P(\mu < X < k) > 0$.
Finalement, si $k > \mu$, $P(X < k) > 0{,}5$.

B. Étude de la zone 2

1. (a) $f = \dfrac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
   (b) $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{50}}; f + \dfrac{1}{\sqrt{50}}\right] = [0{,}159; 0{,}441]$.
2. La courbe de la fonction de densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 205$, ce qui exclut la courbe 3.
De plus $\sigma' > \sigma$, ce qui signifie que les valeurs sont plus dispersées. La courbe représentant la densité de probabilité de la variable aléatoire Y est donc la courbe 1.